Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre printemps 2018-2019

Introduction aux ÉDP — Master 1

Feuille d'exercices n° 1

Dans tout ce qui suit, N désigne un entier naturel non nul et Ω un borélien de $\mathbf{R}^N$. Sauf mention contraire on intégrera toujours par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Un exemple concret.*
D'abord pour $\Omega = B(0,1)$ puis pour $\Omega = B(0,1)^c$ et pour $\Omega = \mathbf{R}^N$ discuter en fonction de $p \in [1,\infty]$ et des paramètres $(\alpha,\beta) \in (\mathbf{R}_+)^2$ si la fonction

$$f \;:\quad \Omega \to \mathbf{R}\,,\quad x \;\mapsto\; \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^\alpha\,(1+\|x\|^\beta)} & \text{si } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $L^p(\Omega)$.

Exercice 2. *Approximation.*
On suppose que Ω est un ouvert et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$K_n \;=\; \left\{\, x \in \Omega \;\middle|\; d(x,\partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|x\| \leq n \,\right\}.$$

1. Justifier que chaque K_n est compact et que $\Omega = \cup_{n\in\mathbf{N}^*} K_n$.
2. Soit $p \in [1,\infty[$ et $f \in L^p(\Omega)$.
   Montrer que la suite $(\mathbf{1}_{K_n \cap \{|f| \leq n\}} f)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to \infty$.
3. Justifier que $L^\infty_c(\mathbf{R}^N)$ — l'ensemble des fonctions bornées à support compact — est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $p > 1$ fini.
4. Justifier que $L^\infty_c(\mathbf{R}^N)$ — l'ensemble des fonctions bornées à support compact — n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Exercice 3. *Mesure finie.* On suppose Ω de mesure $|\Omega|$ finie et l'on se donne $(p,q) \in [1,\infty]^2$ tel que $p \leq q$.
Montrer que si $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Exercice 4. *Interpolation.* Soit $(p,q,r) \in [1,\infty[^3$ tel que $p \le r \le q$ et $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

1. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et, pour tout $\lambda > 0$,
$$\|f\|_{L^r(\Omega)}^r \;\le\; \lambda^{r-p}\,\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \;+\; \lambda^{-(q-r)}\,\|f\|_{L^q(\Omega)}^q\,.$$
Indication : $|f|^r = 1_{\{|f|\le\lambda\}}|f|^r + 1_{\{|f|>\lambda\}}|f|^r$.

2. En déduire que
$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \;\le\; C(p,q,r)\;\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta}\;\|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}\,,$$
où $\theta \in [0,1]$ est défini par $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.
Remarque : En fait on peut mettre cette constante égale à 1.

Exercice 5. *Convergence faible.*
À tout point $a \in \mathbf{R}^N$ et toute fonction mesurable $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, on associe la translatée
$$\tau_a(f)\;:\;\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}\,,\;\; x \mapsto f(x-a)\,.$$

1. Pour $p \in [1,\infty]$, $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $a \in \mathbf{R}^N$, déterminer $\|\tau_a(f)\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}$.
2. Soit $p \in [1,\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$. Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$,
$$\int_{\mathbf{R}^N} \tau_a(f)\,\varphi \;\overset{\|a\|\to\infty}{\to}\; 0\,.$$
3. Donner un contre-exemple à la conclusion précédente quand $p = \infty$.
4. Conclure que si $1 < p < \infty$ alors $(\tau_a(f))$ converge vers 0 pour la topologie faible de $L^p(\mathbf{R}^N)$ quand $\|a\| \to \infty$.
5. Donner un contre-exemple à la conclusion précédente quand $p = 1$.